

L'Arcobaleno

(Alessandro Lenzi)

Degli spettacoli della natura, l'Arcobaleno è senz'altro uno degli esempi più affascinanti e più studiati. Sin dagli albori della civiltà l'insieme di quelle fasce colorate che segnano a bella posa la fine di un acquazzone, ha incuriosito l'Uomo. I filosofi e gli scienziati si sono cimentati nel trovare una spiegazione a questo fenomeno e benché il meccanismo di formazione dell'arcobaleno sia fondamentalmente semplice, la spiegazione completa dell'insieme delle sue caratteristiche ha richiesto non pochi strumenti matematici. E' comunque vero che le caratteristiche fondamentali dell'arcobaleno come la forma circolare, la dispersione cromatica, l'angolo di arcobaleno etc. sono ricavabili in modo piuttosto semplice. In questa rubrica cercheremo di ricostruire i fenomeni che avvengono nell'arcobaleno basandoci principalmente sul nostro spirito di osservazione, ricorrendo a strumenti matematici se non per dare delle risposte numeriche finali.

Il primo passo del nostro studio consiste nel rendersi bene conto di quali oggetti che originano l'arcobaleno. Innanzitutto partiamo con l'osservare che l'arcobaleno si forma principalmente dopo dei forti acquazzoni od in vicinanza di spruzzi d'acqua (annaffiando il giardino ci sarà senz'altro capitato di notare il fenomeno). Secondariamente si dovrà ammettere che è assolutamente necessaria la presenza del sole. Proseguendo ci possiamo rendere conto che ogni qualvolta che

osserviamo l'arcobaleno, il Sole è sempre alle nostre spalle.

Queste prime osservazioni ci permettono di fare delle ragionevoli ipotesi: dunque, l'arcobaleno ha a che fare con degli spruzzi d'acqua o goccioline d'acqua disperse nel cielo dopo una forte pioggia, è originato dalla luce del Sole, che interagisce in qualche modo con le goccioline ed infine, poiché il Sole è sempre alle nostre spalle, tale luce deve essere in qualche modo almeno riflessa indietro dalle goccioline stesse.

Immaginiamo di osservare un arcobaleno e fissiamo per un attimo la nostra attenzione su una piccola porzione di esso: non tutto il cielo è colorato, ma solo una parte, in più, se ci muoviamo, l'arcobaleno ci segue e quando ci muoviamo noi osserviamo porzioni diverse del cielo. Quindi tutto il cielo produce l'arcobaleno ma noi vediamo solo quella parte di luce che può raggiungerci. Ancora, nessuno è mai riuscito ad entrare dentro l'arco colorato o a girargli intorno o ad avvicinarvisi. E' segno che l'arcobaleno deve mantenere una precisa posizione tra noi ed il sole, deve cioè rispettare un angolo ben preciso tra noi che siamo osservatori ed il sole stesso che è la sorgente di luce. E' quindi chiara anche la sua forma circolare: provate a prendere un libro; tenetelo appoggiato su di uno spigolo ed inclinatelo: tenendo con la mano sinistra un vertice ad altezza fissa, fate ruotare con la destra lo spigolo attiguo a quello poggiato sul tavolo, noterete che la mano destra descrive un arco in cui è fisso l'angolo tra

mano sinistra (Sole), mano destra (goccioline d'acqua) ed il punto di appoggio (noi osservatori).

Siamo giunti a buon punto, ma se vogliamo capire la natura delle bande colorate, dovremo avere a che fare con un po' di geometria e con due fenomeni fisici noti dai tempi dei tempi: la riflessione e la rifrazione.

Ogni volta che la luce incide sulla superficie di un materiale succedono tre fenomeni principali:

1) La luce 'rimbalza' sulla superficie, cioè viene riflessa. L'angolo θ_m che il raggio riflesso forma con un asse perpendicolare alla superficie è uguale all'angolo di incidenza della luce.

2) Se la sostanza non è trasparente, parte della luce che la attraversa viene assorbita. Questo è un fenomeno originato per esempio da tutti i corpi colorati che assorbono tutta la luce incidente lasciando riflessa o diffusa solo la luce del colore che non viene assorbito (per esempio, una superficie rossa appare di questo colore perché assorbe tutti i colori fuorché il rosso). Avendo a che fare con gocce d'acqua che sono trasparenti, trascureremo questo fenomeno.

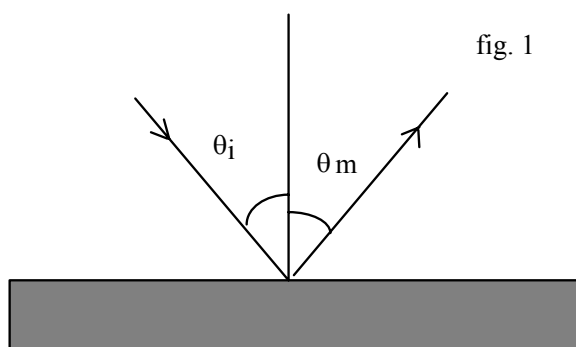


fig. 1

3) La luce riesce ad attraversare la sostanza ma con un angolo θ_r (detto angolo di rifrazione) diverso da quello di incidenza θ_i . L'angolo di rifrazione dipende dalla natura della sostanza da cui proviene la luce e dalla sostanza attraversata. Inoltre, per ogni tipo

di colore, (cioè per quella che viene chiamata lunghezza d'onda) esiste una ben precisa regola di rifrazione che prende il nome di indice di rifrazione. In pratica questo significa che per ogni dato angolo di incidenza della luce, ogni colore viene deviato di angoli leggermente diversi. Quest'ultima caratteristica è estremamente importante perché dà origine alla dispersione cromatica delle bande dell'arcobaleno.

Entriamo in dettaglio nella questione: l'angolo di incidenza è uguale

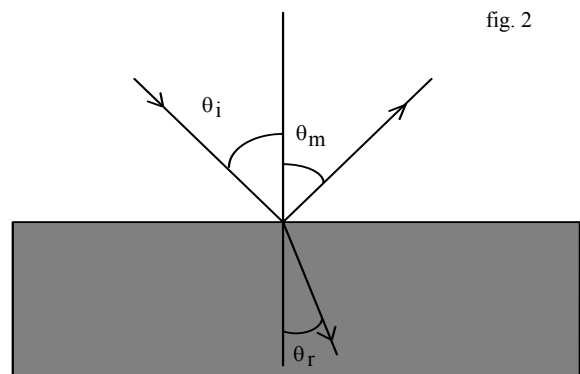


fig. 2

all'angolo di riflessione ma è diverso dall'angolo di rifrazione. Esiste una qualche relazione tra θ_i e θ_r ? Sì: il rapporto tra i seni dell'angolo di incidenza e di rifrazione è costante e prende il nome di indice di rifrazione del mezzo 2 (acqua) rispetto al mezzo 1 (aria nel nostro caso).

$$\eta = \frac{\text{sen}(\theta_i)}{\text{sen}(\theta_r)} \quad [1]$$

È importante che sia ben chiaro che al di là del significato dell'operazione matematica 'seno' esiste una ben precisa relazione tra i due angoli e che questa relazione (il valore dell'indice di rifrazione) è leggermente diversa per la luce blu, verde, gialla, rossa etc.

Siamo ora in grado di capire cosa succede all'interno di ogni minutissima

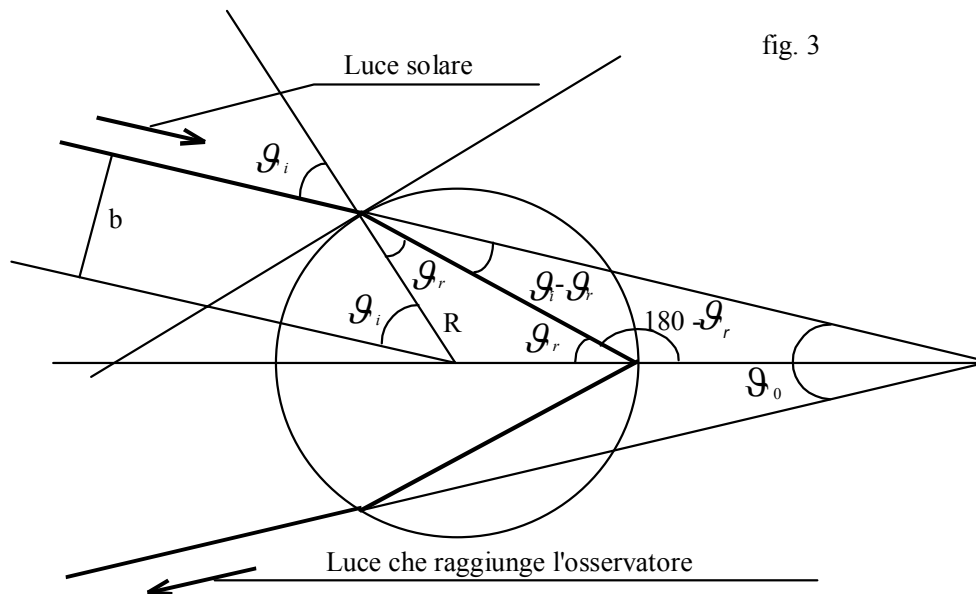


fig. 3

goccia di acqua che fa parte dell'arcobaleno, quando questa viene attraversata da un raggio di luce proveniente dal sole. Per fare ciò ci aiuteremo con un disegno:

la radiazione incidente sulla goccia forma un angolo θ_i rispetto ad una retta tangente alla goccia stessa, viene deviata per rifrazione formando un angolo θ_r e viene riflessa ancora con lo stesso angolo dalla faccia interna della goccia d'acqua. In questo modo ogni raggio di luce forma un angolo apparente θ_0 tra l'osservatore ed il sole che può essere ricavato dalle seguenti relazioni: nominando con b la distanza tra i due raggi incidente e quello passante per il centro della goccia ed indicando con R il raggio della goccia si ha:

$$\text{sen}(\mathcal{G}_i) = \frac{b}{R} \quad [2]$$

l'angolo θ_r può essere ricavato dalla definizione di indice di rifrazione

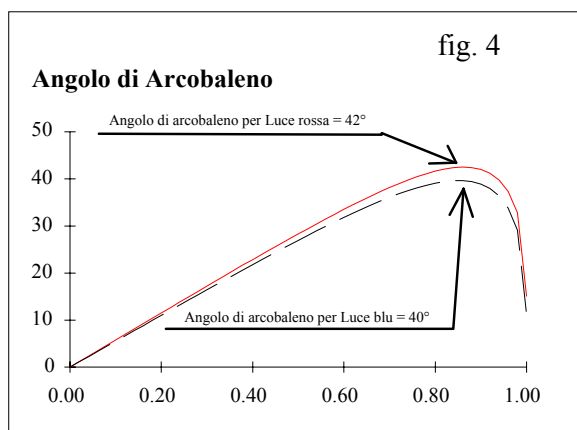
$$\text{sen}(\mathcal{G}_r) = \frac{\text{sen}(\mathcal{G}_i)}{\eta} \quad [3]$$

$$\text{sen}(\mathcal{G}_r) = \frac{\text{sen}(\mathcal{G}_i)}{\eta} = \frac{b}{R} \frac{1}{\eta} \quad [4]$$

A questo punto non rimane che ricavare il valore degli angoli θ_i e θ_r applicando la funzione arcseno che restituisce l'angolo cercato sapendo il valore del suo seno ed applicare la regola della somma degli angoli interni di un triangolo. Dato che questa somma deve essere 180, è presto calcolato l'angolo θ_0 :

$$\mathcal{G}_0 = 4 \arcsin\left(\frac{b}{R} \frac{1}{\eta}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{b}{R}\right) \quad [5]$$

La grandezza b prende il nome di parametro d'impatto ed assume i valori compresi tra 0 ed 1. Tale numero rappresenta tutte le possibili posizioni che può assumere un raggio di luce nell'attraversare una goccia di acqua. Variando questa posizione (cioè b), si possono ricavare gli angoli con cui ogni raggio di sole lascia ogni goccia d'acqua dell'arcobaleno come mostrato in figura 4:



Innanzitutto si osserva che l'angolo θ_0 ha un valore massimo intorno ai 42° gradi per radiazione rossa e 40° per radiazione blu e che questi costituiscono anche l'angolo in cui si ha la massima emissione di luce. Infatti se si suddivide l'asse del parametro di impatto b in tanti piccoli intervalli uguali, e per ogni valore di b si traccia una retta verticale che intercetta la curva di figura 4 e di qui si traccia una linea orizzontale per individuare l'angolo corrispondente, si può osservare che l'angolo di deviazione θ_0 relativo ad ogni b è molto più 'fitto' intorno ai 42 e 40 gradi per radiazione rossa e blu. Questo spiega perché nell'arcobaleno si osservano le caratteristiche bande luminose. Esse rappresentano i punti del cielo in cui si ha un accentramento di raggi luminosi. Le bande sono di colori diversi perché l'indice di rifrazione della luce rossa è minore di quello per la luce gialla che a sua volta è minore per la luce verde e blu. L'indice di rifrazione determina l'angolo di arcobaleno che è di circa 42 gradi per luce rossa e diminuisce per luce gialla, verde e così via fino a raggiungere un angolo di 40 gradi per luce blu.

Per finire, chi volesse armarsi di carta e penna potrebbe vedere cosa succede se un raggio luminoso viene riflesso due volte all'interno di una goccia. Ci si accorgerebbe che in realtà esiste un altro arco, quello di secondo ordine che è visibile un po' più in

alto rispetto all'orizzonte e che tra questo ed il principale e più luminoso esiste una zona in cui non viene trasmessa la luce solare da parte delle goccioline d'acqua. Questa zona più scura è nota dall'antichità e non sfuggì allo spirito di osservazione del filosofo greco Alessandro da cui ha preso il nome appunto di 'banda scura di Alessandro'

Quindi la prossima volta che osserveremo l'arcobaleno potremo renderci conto che esso presenta una banda più esterna rossa che sfuma in arancio, a cui segue una banda gialla e via via una verde fino al blu e al viola. Se ne avremo voglia, potremo ricordarci che tutto questo ha una spiegazione che è racchiusa all'interno di semplici formule matematiche, ma se avremo, più che curiosità, amore per la natura, potremo goderci lo spettacolo forse con un po' più di attaccamento per questa nostra meravigliosa terra.